E.N.S. ULM-SEVRES **GROUPE A**

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Dans l'évaluation des copies il sera tenu compte de la qualité de la rédaction, notamment pour ce qui est de la clarté et de la concision.

Les parties IV et V n'utilisent pas la partie III.

INDICATIONS PRÉLIMINAIRES — NOTATIONS

1° N désigne un entier positif. On rappelle que $\mathbb{Z}^N$ est le réseau formé par les points de $\mathbb{R}^N$ dont les coordonnées sont des entiers relatifs :

$$\mathbb{Z}^N = \{ z = z_1 e_1 + \ldots + z_N e_N \; ; \; z_1, \ldots, z_N \in \mathbb{Z} \}$$

où $\{ e_1, \ldots, e_N \}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^N$. On notera $|x|$ la norme euclidienne usuelle d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^N$. Pour tout $x \in \mathbb{Z}^N$ on posera

$$V(x) = \{ x' \in \mathbb{Z}^N ; |x' - x| = 1 \} = \{ x + e_1, x - e_1, x + e_2, \ldots, x - e_N \} .$$

2° Soit $\Omega \subset \mathbb{Z}^N$; on désignera par $\mathcal{F}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Lorsque Ω est *borné*, Ω est fini : soit m le nombre de ses éléments, $\Omega = \{ x^1, \ldots, x^m \}$. Dans ce cas, une fonction f étant déterminée par les m réels $f(x^1), \ldots, f(x^m)$, il est immédiat de vérifier que $\mathcal{F}(\Omega)$ est de dimension m. Pour $f \in \mathcal{F}(\Omega)$, on notera simplement $\sum_{x \in \Omega} f(x)$ la somme $\sum_{k=1}^{m} f(x^k)$.

De même, pour $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, on notera

$$\sum_{\substack{x, x' \in \Omega \\ |x - x'| = 1}} g(x, x') = \sum_{x \in \Omega} \sum_{x' \in V(x) \cap \Omega} g(x, x')$$

L'espace vectoriel $\mathcal{F}(\Omega)$ est muni d'une structure euclidienne naturelle par le produit scalaire

$$< u, v >_\Omega = \sum_{x \in \Omega} u(x) \, v(x)$$

On notera $\| u \| = \{ < u, u >_\Omega \}^{1/2}$.

3° On dira qu'un sous-ensemble $D \subset \mathbb{Z}^N$ est *connexe* si $\forall x, y \in D$, $\exists q \in \mathbb{N}$, $\exists x_0, x_1, \ldots, x_q \in D$ tels que $x_0 = x$, $x_q = y$ et $\forall i = 0, 1, \ldots, q - 1$, $|x_i - x_{i+1}| = 1$. (Si D ne contient qu'un seul élément, on dira également que D est connexe.)

Soit $\Omega \subset \mathbb{Z}^N$; on définit l'*intérieur* Ω' de Ω en posant $\Omega' = \{ x \in \Omega \; ; \; V(x) \subset \Omega \}$

et la *frontière* $\partial\Omega$ de Ω en posant $\partial\Omega = \Omega \setminus \Omega'$

On dira que Ω est un *domaine* de $\mathbb{Z}^N$ si :

i. $\Omega' \neq \varnothing$;
ii. Ω' est connexe;
iii. Ω est connexe.

4° Soit $\Omega \subset \mathbb{Z}^N$ tel que $\Omega' \neq \varnothing$ et $\partial\Omega \neq \varnothing$. On définit les opérateurs (ou applications linéaires) de *prolongement*

$$J : \mathcal{F}(\Omega') \to \mathcal{F}(\Omega) \quad \text{et} \quad J_1 : \mathcal{F}(\partial\Omega) \to \mathcal{F}(\Omega)$$

en posant $Ju(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega' \\ 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases}$ $\quad J_1 u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \Omega' \\ u(x) & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases}$

Ces opérateurs permettent d'identifier $\mathcal{F}(\Omega')$ et $\mathcal{F}(\partial\Omega)$ à des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\Omega)$ et on vérifie que $\mathcal{F}(\Omega') = \mathcal{F}(\partial\Omega)^\perp$.

On définit les opérateurs usuels de *restriction*

$$R : \mathcal{F}(\Omega) \to \mathcal{F}(\Omega'), \quad S : \mathcal{F}(\Omega) \to \mathcal{F}(\partial\Omega)$$
$$(Ru(x) = u(x), \; \forall x \in \Omega' \quad \text{et} \quad Su(x) = u(x), \; \forall x \in \partial\Omega) .$$

5° Soit $\Omega \subset \mathbb{Z}^N$ un domaine. Dans toute la suite, on considère les applications linéaires

$$P, A : \mathcal{F}(\Omega) \to \mathcal{F}(\Omega')$$

définies pour $u \in \mathcal{F}(\Omega)$, $x \in \Omega'$ par $\quad Pu(x) = \frac{1}{2N} \sum_{y \in V(x)} u(y)$

$$Au(x) = u(x) - Pu(x)$$

(c'est-à-dire $A = R - P$).

Pour $u \in \mathcal{F}(\Omega)$, une expression du type $u = 0$ dans (ou sur) $D \subset \Omega$ (resp. $u \geqslant 0$, $u > 0$, ..., dans D) signifie : $\forall x \in D$, $u(x) = 0$ (resp. $u(x) \geqslant 0$, $u(x) > 0$, ...).

Dans tout le problème, Ω désignera un *domaine borné* de $\mathbb{Z}^N$.

Tournez la page S. V. P.

page 28 1986 ENS Ulm-Sevres Groupe A Math 2

1° Soit $u \in \mathcal{F}(\Omega)$ vérifiant $Au \geqslant 0$ dans Ω'.

Soit $x_0 \in \Omega'$ tel que $u(x_0) = \underset{x \in \Omega}{\text{Min}}\, u(x)$:

a. Montrer que $u = u(x_0)$ sur $V(x_0)$;

b. En déduire que $u = u(x_0)$ dans Ω' ;

c. Est-ce que $u = u(x_0)$ dans Ω ou dans un ensemble Ω_1 tel que $\Omega' \subset \Omega_1 \subset \Omega$?

2° À l'aide de la question précédente, montrer que si $u \in \mathcal{F}(\Omega)$ vérifie $Au \geqslant 0$ dans Ω' alors

$$\underset{x \in \Omega}{\text{Min}}\, u(x) = \underset{x \in \partial\Omega}{\text{Min}}\, u(x).$$

3° *a.* Soit $u \in \mathcal{F}(\Omega)$ tel que $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et $Au \geqslant 0$ dans Ω'. Prouver que ou bien $u = 0$ sur Ω, ou bien $u > 0$ dans Ω'.

b. Que peut-on dire de u vérifiant $Au = 0$ dans Ω' et $u = 0$ sur $\partial\Omega$?

4° *a.* En déduire que pour tous $f \in \mathcal{F}(\Omega')$ et $g \in \mathcal{F}(\partial\Omega)$ donnés, il existe une solution unique du système d'équations linéaires

$$(1) \qquad \begin{cases} Au = f \\ Su = g \end{cases}$$

b. Quelle est la dimension de ker A ?

5° On pose $\mathcal{F}_0(\Omega) = \ker S = \{ u \in \mathcal{F}(\Omega);\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$. On note A' la restriction à $\mathcal{F}_0(\Omega)$ de l'application $J \circ A$. Établir que A' est un automorphisme auto-adjoint de $\mathcal{F}_0(\Omega)$ [ce sous-espace héritant de la structure euclidienne de $\mathcal{F}(\Omega)$].

II

Pour $u \in \mathcal{F}(\Omega)$ on pose

$$Q(u) = \frac{1}{8N} \sum_{\substack{x, x' \in \Omega \\ |x - x'| = 1}} [u(x) - u(x')]^2$$

$$\| u \|_1 = \sqrt{Q(u)}.$$

1° Vérifier que $\| \cdot \|_1$ est une norme sur $\mathcal{F}_0(\Omega)$.

2° Pour $u \in \mathcal{F}_0(\Omega)$ exprimer $Q(u)$ à l'aide de $A'u$.

3° Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ donné. On définit l'application $\Phi : \mathcal{F}(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$\Phi(u) = Q(u) - \sum_{x \in \Omega} f(x)\, u(x)$$

Montrer que $\lim_{\substack{\| u \| \to +\infty \\ u \in \mathcal{F}_0(\Omega)}} \Phi(u) = +\infty$.

4° En déduire l'existence de $u \in \mathcal{F}_0(\Omega)$ tel que

$$(2) \qquad \Phi(u) = \underset{v \in \mathcal{F}_0(\Omega)}{\text{Min}}\, \Phi(v)$$

5° Montrer que $u \in \mathcal{F}_0(\Omega)$ vérifie (2) si et seulement si u vérifie une certaine équation linéaire [du type (1)] que l'on précisera.

[On pourra étudier par exemple la dérivée en $t = 0$ de l'application $t \in \mathbb{R} \to \Phi(u + tv)$, $v \in \mathcal{F}_0(\Omega)$.] En déduire l'unicité de la solution u du problème de minimisation (2).

III

On définit une application linéaire $B : \mathcal{F}(\Omega) \to \mathcal{F}(\partial\Omega)$ de la façon suivante.

Pour $x \in \Omega$, soit $d(x)$ le nombre d'éléments de $V(x) \cap \Omega$. (On vérifie que $0 < d(x) \leqslant 2N$.)

Soit $u \in \mathcal{F}(\Omega)$ et $x \in \partial\Omega$. On pose

$$Bu(x) = \frac{d(x)}{2N}\, u(x) - \frac{1}{2N} \sum_{y \in V(x) \cap \Omega} u(y)$$

1° Soient $u, v \in \mathcal{F}(\Omega)$. Écrire

$$< Au, Rv >_{\Omega'} - < Av, Ru >_{\Omega'}$$

au moyen de termes ne faisant intervenir que le produit scalaire $< , >_{\partial\Omega}$.

Tournez la page S. V. P.

2° On pose

$$\Psi(u) = \Phi(u) + \frac{1}{2} \| u \|^2$$

(on rappelle que $\| u \|^2 = \sum_{x \in \Omega} u(x)^2$). En suivant la démarche de la section II,

a. Établir, pour tout $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ donné, l'existence d'une solution $u \in \mathcal{F}(\Omega)$ du problème de minimisation

$$\Psi(u) = \operatorname*{Min}_{v \in \mathcal{F}(\Omega)} \Psi(v) \tag{3}$$

b. Montrer que u vérifie (3) si et seulement si u est solution d'un certain système linéaire (4) que l'on précisera.

c. Établir l'unicité de la solution de (4).

3° Déterminer les solutions $u \in \mathcal{F}(\Omega)$ du système

$$\begin{cases} Au = 0 \\ Bu = 0 \end{cases} \tag{5}$$

4° Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $f \in \mathcal{F}(\Omega')$ pour qu'il existe au moins une solution u du système

$$\begin{cases} Au = f \\ Bu = 0 \end{cases} \tag{6}$$

IV

Pour tout $u \in \mathcal{F}_0(\Omega)$, $u \neq 0$, on pose $\rho(u) = 2 \dfrac{Q(u)}{\| u \|^2}$

(Remarquer que $\rho(t u) = \rho(u)$, $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$.)

On définit : $\lambda_1 = \operatorname*{Inf}_{u \in \mathcal{F}_0(\Omega) \setminus \{0\}} \rho(u)$

1° Montrer que $\lambda_1 > 0$.

2° Établir l'existence de $u_1 \in \mathcal{F}_0(\Omega)$, $u_1 \neq 0$ tel que $\rho(u_1) = \lambda_1$.

[Considérer $S = \{ u \in \mathcal{F}_0(\Omega); \| u \|^2 = 1 \}$, vérifier que $\lambda_1 = \operatorname*{Inf}_{u \in S} \rho(u)$ et envisager une suite (u_n), $u_n \in S$, $\forall n$ et $\lim_{n \to \infty} \rho(u_n) = \lambda_1$.]

3° Pour $u \in \mathcal{F}(\Omega)$, on pose : $\forall x \in \Omega$, $|u|(x) = |u(x)|$. Comparer $\| |u| \|$ avec $\| u \|$ et $Q(|u|)$ avec $Q(u)$ respectivement.

En déduire une propriété concernant le signe de $u_1(x)$ en tant que fonction de $x \in \Omega'$.

4° On considère à nouveau l'opérateur A' introduit en I-5° (voir aussi II.2°). En étudiant pour tout $v \in \mathcal{F}_0(\Omega)$ la valeur de

$$\frac{d}{dt} \rho(u_1 + tv) \Big|_{t=0}$$

prouver que λ_1 est une valeur propre de A'.

Trouver un vecteur propre associé. Montrer que λ_1 est la plus petite valeur propre de A'.

5° Soit $v \neq 0$, $v \in \mathcal{F}_0(\Omega)$ un vecteur propre associé à λ_1 ; déterminer $\rho(v)$. Que peut-on dire du signe de $v(x)$ pour $x \in \Omega'$?

6° Soient v, $w \in \mathcal{F}_0(\Omega)$ deux fonctions linéairement indépendantes. On suppose qu'il existe deux points distincts x, $y \in \Omega'$ en lesquels ni v ni w ne s'annulent. Montrer qu'il existe α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ tels que

$$\alpha v(x) + \beta w(x) < 0$$
$$\alpha v(y) + \beta w(y) > 0$$

7° Montrer que λ_1 est une valeur propre simple de A'.

8° Soit $\mu \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A' et $v \neq 0$ un vecteur propre associé vérifiant $v \geqslant 0$ dans Ω'. Établir que $\mu = \lambda_1$.

[On choisira un vecteur propre u_1 associé à λ_1 pour lequel on montrera que les réels

$$\alpha = \operatorname{Inf} \{ t > 0; \ tv \geqslant u_1 \text{ dans } \Omega \}$$
$$\beta = \operatorname{Inf} \{ t > 0; \ tu_1 \geqslant v \text{ dans } \Omega \}$$

sont bien définis. On étudiera ensuite

$$A(\alpha v - u_1) \quad \text{et} \quad A(\beta u_1 - v).]$$

Tournez la page S. V. P.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall\, s \leqslant 0$, $g(s) = 0$. On suppose que g admet une dérivée à droite en 0, $g'_+(0)$.

On pose

$$G(t) = \int_0^t g(s)\, ds$$

Dans cette partie, on étudie l'équation (en u) non linéaire :

$$A'u = g \circ u \qquad (u \in \mathcal{F}_0(\Omega)) \tag{7}$$

1° Soit u solution de (7). Montrer que $u \geqslant 0$.

[On examinera les implications de l'existence de $x_0 \in \Omega'$ tel que

$$\operatorname*{Min}_{\Omega} u = u(x_0) < 0.]$$

Prouver que si $u \neq 0$, alors $u > 0$ dans Ω'.

2° On suppose que $\forall\, s > 0$, $g(s) - \lambda_1 s \neq 0$.

Montrer qu'alors $u = 0$ est l'unique solution de (7). [On pourra « multiplier » (7) par une fonction de $\mathcal{F}_0(\Omega)$ convenablement choisie.]

3° Calculer la différentielle de l'application $H : \mathcal{F}_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$H(u) = Q(u) - \sum_{x \in \Omega} G[u(x)]$$

4° En admettant que la limite suivante existe et vérifie

$$\lim_{s \to +\infty} g(s)/s = L < \lambda_1, \tag{8}$$

montrer que

i. $\operatorname*{Inf}_{u \in \mathcal{F}_0(\Omega)} H(u) > -\infty$

ii. $\exists\, u \in \mathcal{F}_0(\Omega)$ solution du problème de minimisation

$$H(u) = \operatorname*{Min}_{v \in \mathcal{F}_0(\Omega)} H(v) \tag{9}$$

5° Sous l'hypothèse supplémentaire

$$g'_+(0) > \lambda_1 \tag{10}$$

montrer que

$$\operatorname*{Min}_{v \in \mathcal{F}_0(\Omega)} H(v) < 0$$

[Étudier $H(tu_1)$ au voisinage de $t = 0$.]

6° En conclure que sous les hypothèses (8) et (10), l'équation (7) admet une solution u telle que $u > 0$ dans Ω'.

7° On suppose en plus des conditions (8) et (10) que g est croissante et strictement concave sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que la solution non identiquement nulle de (7) est unique. [Étant donné v et w solutions on introduira $\alpha = \operatorname{Inf}\{ t > 0;\ tv \geqslant w$ dans $\Omega \}$ et on cherchera à montrer que $\alpha \leqslant 1$.]

8° Établir l'existence d'une solution $u \in \mathcal{F}_0(\Omega)$ vérifiant $u > 0$ dans Ω' pour l'équation

$$A'u = u^p \tag{11}$$

où p désigne un réel tel que $p > 1$.